

Capítulo 3

P 3.1

Resolução:

Seguindo o roteiro:

- a) Como a função é polinomial, não tem restrições, $D(f) = \mathbb{R}$;
- b) Interseção com o eixo y : $f(0) = 3 \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 2 = 2 \rightarrow P = (0, 2)$;
interseção com o eixo x : Como é uma função do 4º grau, não vamos buscar a interseção com o eixo x .
- c) Vamos estudar o sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0 \rightarrow 12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ e}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Neste caso, a derivada da função é uma função do 3º grau e vamos estudar a sua variação por meio do varal:

	0	1	
$12x$	-	+	+
$x^2 - 2x + 1$	+	+	+
$f'(x)$	-	+	+

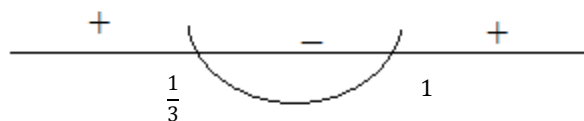
Então a função $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 0$ é decrescente e $\forall x \in \mathbb{R}; x \geq 0$, a função é crescente.

- d) Agora, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 0$$

Neste caso temos uma equação do 2º grau, cujas raízes vamos determinar aplicando a fórmula de Bháskara,

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{1}{3} \end{cases}$$



E a função $f(x)$ tem concavidade positiva para $x < \frac{1}{3}$ ou $x > 1$ e concavidade negativa para $\frac{1}{3} < x < 1$.

e) De acordo com o item c), as abscissas dos extremantes são: $x' = 0$ e $x'' = 1$.

Vamos calcular as segundas derivadas destes pontos, para, de acordo com a proposição 3.3, decidir o tipo de extremante:

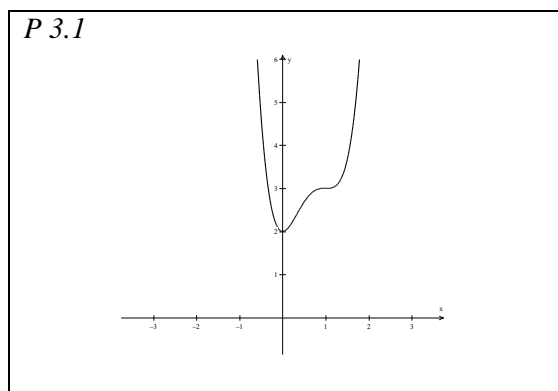
$f''(0) = 36 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 12 > 0$, então $x' = 0$ é abscissa de ponto de mínimo;

$f''(1) = 36 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 12 = 0$, então $x'' = 1$ é abscissa de ponto de inflexão, assim como o ponto de abscissa $x = \frac{1}{3}$ também é ponto de inflexão.

f) A função não tem assíntotas verticais, pois não há pontos de restrições em seu domínio e as assíntotas horizontais, se houver, aparece no item g), se o resultado do limite for um número real, de acordo com a seção 1.12 do capítulo 1.

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2 = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2 = \infty$

h) Marcando os pontos de interseção com os eixos, começamos a esboçar o gráfico, observando que ele vem de ∞ decrescente com a concavidade positiva até o $x = \frac{1}{3}$; continua a decrescer até o $x = 0$, mas agora com a concavidade negativa. Em $x = 0$ passa a crescer com a concavidade negativa até o $x = 1$, onde ele muda para concavidade positiva e continua crescendo até $+\infty$. Observe,



P 3.2

Resolução:

Seguindo o roteiro:

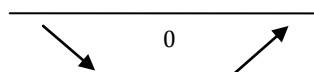
a) A função é exponencial e polinomial, portanto não tem restrições, $D(f) = \mathbb{R}$;

b) Interseção com o eixo y: $f(0) = e^0 - 0 = 1 \rightarrow P = (0,1)$; interseção com o eixo x: Como é uma função exponencial, não vamos buscar a interseção com o eixo x.

c) Vamos estudar o sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$$

Neste caso, a derivada da função é uma função exponencial e a sua variação é dada por:



Então a função $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 0$ é decrescente e $\forall x \in \mathbb{R}; x \geq 0$, a função é crescente.

d) Agora, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = e^x > 0$$

Neste caso temos que a função tem concavidade positiva em todos os pontos do seu domínio.

e) De acordo com o item c), a abscissa do extremante é: $x = 0$. Vamos calcular a segunda derivada deste ponto, para decidir o tipo de extremante:

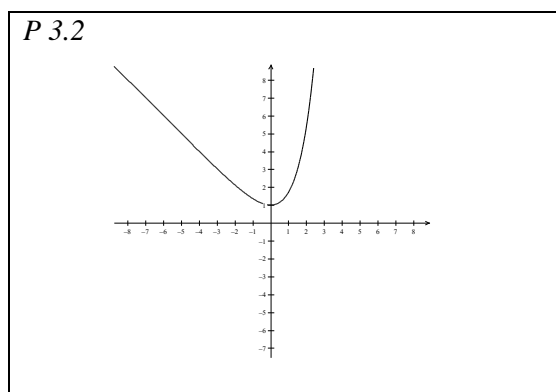
$f''(0) = e^0 > 0$, então $x = 0$ é abscissa de ponto de mínimo.

A função não tem de ponto de inflexão, já que sua concavidade não muda de sinal.

f) A função não tem assíntotas verticais, pois não há pontos de restrições em seu domínio e as assíntotas horizontais, se houver, aparece no item g), se o resultado do limite for um número real,

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \infty$

h) Marcando os pontos de interseção com os eixos, começamos a esboçar o gráfico, observando que ele vem de ∞ decrescente com a concavidade positiva até o $x = 0$; onde passa a crescer até $+\infty$. Observe,



P 3.3

Resolução:

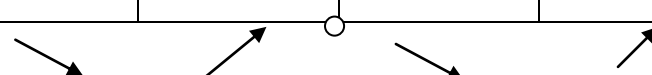
Seguindo o roteiro:

- a) A função não está definida em $x = 0$, $D(f) = \mathbb{R}^*$;
- b) Interseção com o eixo y , não pode ter pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função. Interseção com o eixo x : $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+1}{x^2} = 0 \rightarrow x^4 = -1$, também não vamos ter raiz real para esta equação. Portanto, a função não toca nenhum dos eixos.
- c) Vamos estudar o sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0 \rightarrow 2(x^4 - 1) = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Neste caso, vamos estudar a sua variação por meio do varal:

$2x^4 - 2$	+	-1	-	0	-	1	+
x^3	-		-		+		+
$f'(x)$	-		+		-		+



Então a função $f(x)$: é decrescente em: $x \leq -1$ ou $0 < x \leq 1$ e a função é crescente em: $-1 \leq x < 0$ ou $x \geq 1$.

- d) Agora, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} = \frac{2x^4 + 6}{x^4} = 0 \rightarrow 2x^4 = -6$$

Neste caso não temos raiz real para esta equação, portanto, como o numerador e o denominador são polinomiais de potências pares, a concavidade é sempre positiva.

- e) De acordo com o item c), as abscissas dos extremantes são: $x' = -1$ e $x'' = 1$.

Vamos calcular as segundas derivadas destes pontos, para decidir o tipo de extremante:

$$f''(-1) = \frac{2(-1)^4 + 6}{(-1)^4} > 0, \text{ então } x' = -1 \text{ é abscissa de ponto de mínimo;}$$

$$f''(1) = \frac{2(1)^4 + 6}{(1)^4} > 0, \text{ então } x'' = 1 \text{ também é abscissa de ponto de mínimo.}$$

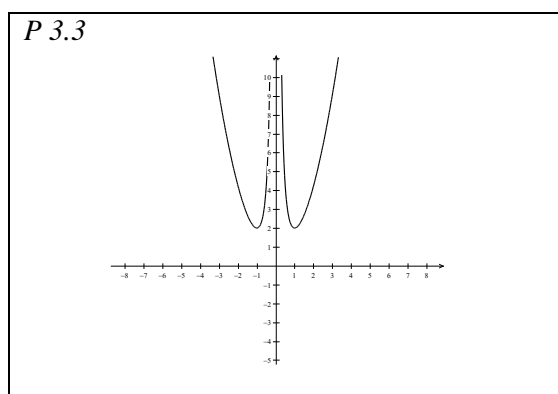
Não há pontos de inflexão, já que a concavidade não muda de sinal.

- f) Vamos verificar as assíntotas verticais, analisando os limites laterais no ponto de restrição, ou seja, em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} x^2 + \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} x^2 + \frac{1}{x^2} = \infty$$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \frac{1}{x^2} = \infty$

- h) Começamos a esboçar o gráfico, observando que ele vem de ∞ decrescente com a concavidade positiva até o $x = -1$; passa a crescer até o $x = 0$ e sempre com a concavidade positiva. Como a função não está definida em $x = 0$, pelo lado negativo, ela cresce para ∞ . Pulando o eixo, perto do $x = 0$, a função vem de ∞ decrescendo, com concavidade positiva até o $x = 1$, onde passa a crescer com a concavidade positiva até o ∞ . Observe,



P 3.4

Resolução:

Seguindo o roteiro:

- a) A função não está definida em $x^2 - 4 < 0$:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$



$$D(f) =] - \infty - 2[\cup] 2, +\infty[.$$

- b) Interseção com o eixo y , não pode ter pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função. Interseção com o eixo x : $\sqrt{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$. Então temos $P(-2,0)$ e $Q(2,0)$ pontos de interseção com o eixo x .

c) Vamos estudar o sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

Neste caso vamos estudar a sua variação por meio do varal:

	-2	0	2	
x	-	-	+	+
$\sqrt{x^2-4}$	+			+
$f'(x)$	-			+

Então a função $f(x)$: é decrescente em : $x \leq -2$ e a função é crescente em: $x \geq 2$.

d) Agora, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-4} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{(\sqrt{x^2-4})^2} = \frac{\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-4}{(x^2-4)^{3/2}}$$

Neste caso não temos raiz real para esta equação, portanto, como o numerador é negativo e o denominador sempre positivo, a concavidade é sempre negativa.

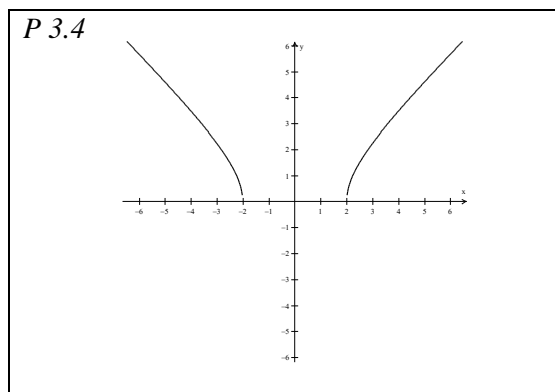
e) Não há abscissas de extremantes, portanto não há máximos nem mínimos. Como a concavidade não muda de sinal, também não há pontos de inflexão. Não há pontos de inflexão, já que a concavidade não muda de sinal.

f) Vamos verificar as assíntotas verticais, analisando os limites laterais no ponto de restrição, ou seja, em $x = -2$ e $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2_-} \sqrt{x^2-4} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2_+} \sqrt{x^2-4} = 0$$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-4} = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-4} = \infty$

h) Marcando os pontos de interseção, começamos a esboçar o gráfico, observando que ele vem de ∞ decrescente com a concavidade negativa até o $x = -2$, onde tende a zero. Passando para o outro lado, a partir do ponto $x = 2$ que a função também parte do zero, ela cresce com a concavidade negativa até o ∞ . Observe,



P 3.5

Resolução:

Seguindo o roteiro:

- a) A função não está definida em $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$;
- b) Interseção com o eixo y , $f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0 \rightarrow P = (0,0)$. Interseção com o eixo x :
 $\frac{x^2}{x+1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$, portanto o ponto é o mesmo.
- c) Vamos estudar o sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x(x+2) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Neste caso, vamos estudar a sua variação por meio do varal:

	-2	-1	0	
$x^2 + 2x$	+	-	-	+
$(x + 1)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	+	-	-	+

</

Então a função $f(x)$: é decrescente em : $-2 \leq x < -1$ ou $-1 < x \leq 0$ e a função é crescente em: $x \leq -2$ ou $x \geq 0$.

- d) Agora, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(2x+2) \cdot (x+1)^2 - (x^2+2x)2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{(x+1)[(2x+2) \cdot (x+1) - (x^2+2x)2]}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{2x^2+2x+2x+2 - (2x^2+4x)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3} = 0
 \end{aligned}$$

Neste caso, como o numerador é sempre positivo, o sinal que prevalece é do denominador. Então, a concavidade é negativa para $x < -1$ e é positiva para $x > -1$.

e) As abscissas dos extremantes são: $x' = -2$ e $x'' = 0$. Vamos calcular as segundas derivadas destes pontos, para decidir o tipo de extremante:

$$f''(-2) = \frac{2}{(-2+1)^3} < 0, \text{ então } x' = -1 \text{ é abscissa de ponto de máximo;}$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} > 0, \text{ então } x'' = 1 \text{ também é abscissa de ponto de mínimo.}$$

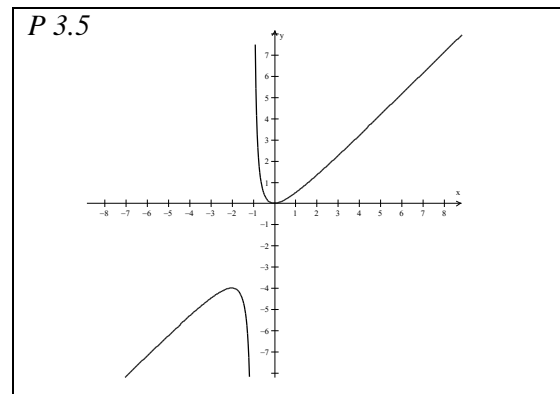
Não há pontos de inflexão, já que o ponto aonde a concavidade muda de sinal não pertence ao domínio da função.

f) Vamos verificar as assíntotas verticais, analisando os limites laterais no ponto de restrição, ou seja, em $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0_-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0_+} = \infty$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty$$

h) Começamos a esboçar o gráfico, observando que ele vem de $-\infty$ crescente com a concavidade negativa até o $x = -2$, que é o ponto de máximo da função ; passa a decrescer até o $x = -1$, ainda com concavidade negativa e quando se aproxima de $x = -1$, tende a $-\infty$. Como a função não está definida em $x = -1$, pulando a assíntota, perto do $x = -1$, a função vem de ∞ decrescendo, com concavidade positiva até o $x = 0$, que é seu ponto de mínimo. Daí passa a crescer com a concavidade positiva até o ∞ . Observe,



P 3.6

Resolução:

Seguindo o roteiro:

- a) A função não está definida em $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$, $D(f) = \mathbb{R}^*$;
 b) Interseção com o eixo não tem pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função.

Interseção com o eixo x : $\frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$. Vamos aplicar a formula de Bháskara para determinar as raízes da função:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Logo, não há interseções com o eixo x .

- c) Vamos estudar o sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)x^2 - (x^2 - x + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x}{x^4} = 0$$

$$\rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Neste caso, vamos estudar a sua variação por meio do varal:

		0		2		
$x^2 - 2x$		+		-		+
x^4		+		+		+
$f'(x)$		+		-		+

Então a função $f(x)$: é decrescente em $0 < x \leq 2$ e a função é crescente em: $x \leq 0$ ou $x \geq 2$.

d) Agora, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(2x-2) \cdot x^4 - (x^2-2x)4x^3}{x^8} = \frac{x^3[(2x-2) \cdot x - (x^2-2x)4]}{x^8} \\
 &= \frac{2x^2 - 2x - (4x^2 - 8x)}{x^5} = \frac{-2x^2 + 6x}{x^5} = 0 \rightarrow x(-2x + 6) = 0 \\
 &\rightarrow x = 0 \text{ ou } \rightarrow x = 3
 \end{aligned}$$

Neste caso, vamos estudar a sua variação por meio do varal:

		0	3	
$-2x^2 + 6x$	-	+	-	
x^5	-	+	+	
$f''(x)$	+	+	-	
	∪	○	∩	

Neste caso a concavidade é negativa para $x > 3$ e é positiva para $x < 0$ ou $0 < x < 3$.

e) A abscissa do extremante é $x = 2$. Vamos calcular a segunda derivada deste ponto, para decidir o tipo de extremante:

$$f''(2) = \frac{-2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2}{2^5} > 0, \text{ então } x = 2 \text{ é abscissa de ponto de mínimo.}$$

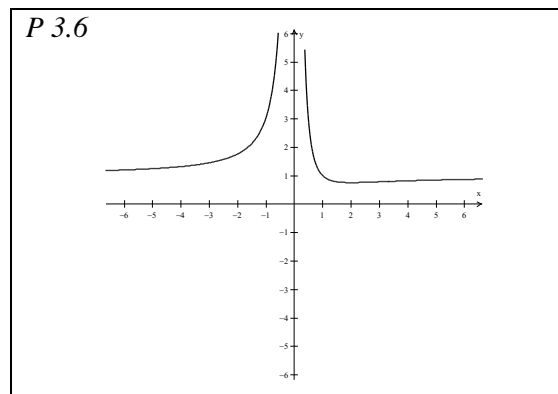
$x = 3$ é abscissa de ponto de inflexão, já que é o ponto onde a concavidade muda de sinal.

f) Vamos verificar as assíntotas verticais, analisando os limites laterais no ponto de restrição, ou seja, em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = \frac{1}{0_+} = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = \frac{1}{0_+} = \infty$$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1$. Neste caso temos uma assíntota horizontal em $y = 1$.

h) Começamos a esboçar o gráfico, observando que ele vem da assíntota horizontal $y = 1$ crescente com a concavidade positiva até o $x = 0$, quando tende para ∞ ; mudando para o outro lado do eixo, a função vem de ∞ e decresce até o $x = 2$, com concavidade positiva. Como este é o ponto de mínimo da função, a partir daí passa a crescer, ainda com concavidade positiva, até $x = 3$, quando a concavidade muda de sinal. Continua crescendo até ∞ . Observe,



P 3.7

Resolução:

Seguindo o roteiro:

- a) A função está definida em todos os pontos do conjunto dos números reais, já que:

$$x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -2 \notin \mathbb{R}. \text{ Logo, } D(f) = \mathbb{R}$$

- b) Interseção com o eixo y, $f(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2+2}} = 0 \rightarrow P = (0,0)$. Interseção com o eixo x:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = 0 \rightarrow x = 0, \text{ portanto o ponto é o mesmo.}$$

- c) Vamos estudar o sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{(\sqrt{x^2 + 2})^2} = \frac{x^2 + 2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 2})(x^2 + 2)} = \frac{2}{(x^2 + 2)^{3/2}}$$

Neste caso como o numerador e o denominador são sempre positivos, a função é sempre crescente.

- d) Agora, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2 + 2)^{3/2} - 2 \cdot 2x \cdot \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{1/2}}{(x^2 + 2)^3} = \frac{-6x \cdot (x^2 + 2)^{1/2}}{(x^2 + 2)^3} = \frac{-6x}{(x^2 + 2)^{5/2}} = 0$$

$$\rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

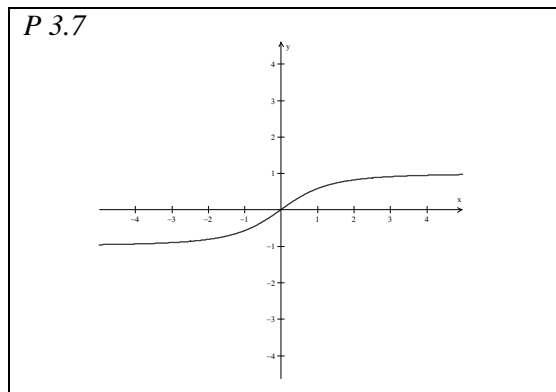
Neste caso a concavidade é positiva em $x < 0$ e negativa em $x > 0$.

- e) Não há pontos de máximo ou mínimo. $x = 0$ é abscissa de ponto de inflexão, já que é o ponto onde a concavidade muda de sinal.

- f) Não há assíntotas verticais já que não há restrições no domínio da função

- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = 1$. Neste caso temos duas assíntotas horizontais em: $y = -1$ e $y = 1$.

- h) Começamos a esboçar o gráfico marcando a interseção com os eixos que é o ponto $P(0,0)$. Depois observando que ele vem da assíntota horizontal $y = -1$ crescente com a concavidade positiva até o $x = 0$, quando muda a concavidade para negativa, continua crescendo até a próxima assíntota $y = 1$. Observe,



P 3.8

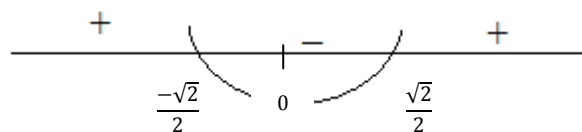
Resolução:

Seguindo o roteiro:

- A função não está definida em $x \leq 0$ por causa da função logarítmica $D(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- Interseção com o eixo não tem pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função. Não vamos procurar interseção com o eixo x já que a função não é simples.
- Vamos estudar o sinal da primeira derivada:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} = 0 \rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Neste caso, vamos estudar a sua variação por meio do varal:



Então a função $f(x)$: é decrescente em $0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ e a função é crescente em $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Agora, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow 2x^2 = -1 \notin \mathbb{R}$$

Neste caso a segunda derivada é sempre positiva, ou seja, a concavidade da função é sempre positiva.

- e) A abscissa do extremante é $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vamos calcular a segunda derivada deste ponto para decidir o tipo de extremante:

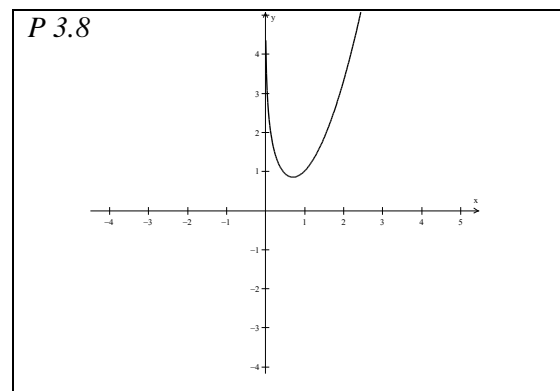
$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.5 - (-0,34) > 0, \text{ então } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ é abscissa de ponto de mínimo.}$$

Não há ponto de inflexão, já a concavidade não muda de sinal.

- f) Vamos verificar o comportamento da função perto da assíntota vertical, que no caso é $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x^2 - \ln x = 0 - (-\infty) = \infty$$

- g) Começamos a esboçar o gráfico, observando perto do $x = 0$ ele vem de ∞ , com concavidade sempre positiva, vai decrescendo até o ponto $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que é o ponto de mínimo da função. A partir daí cresce, ainda com concavidade positiva ∞ . Observe,



P 3.9

Resolução:

Vamos lembrar que o volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$, a área do fundo e da tampa é $A = \pi r^2$ e a área da parte lateral é $A_L = 2\pi r h$.

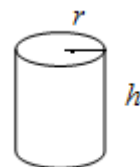
Então, o custo total seria:

$$C = (2\pi r h + \pi r^2) \cdot 7 + (\pi r^2) \cdot 8,5$$

Sabendo que $V = \pi r^2 h = 1$, podemos tirar a altura em função do raio:

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Logo,



$$C = (2\pi rh + \pi r^2) \cdot 7 + (\pi r^2) \cdot 8,5 = C = \left(2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + \pi r^2\right) \cdot 7 + (\pi r^2) \cdot 8,5$$

$$= \frac{14}{r} + 15,5\pi r^2$$

Utilizando o critério geral para o estudo de extremos relativos, temos:

$$C' = -\frac{14}{r^2} + 31\pi r = \frac{-14 + 31\pi r^3}{r^2} = 0 \rightarrow -14 + 31\pi r^3 = 0 \rightarrow 31\pi r^3 = 14$$

$$\rightarrow r^3 = \frac{14}{31\pi} = 0,1437 \rightarrow r = 0,5238$$

$$C'' = \frac{28}{r^3} + 31\pi$$

Vamos experimentar o valor do raio encontrado para verificar se o ponto encontrado é ponto de mínimo da função:

$$C'' = \frac{28}{(0,5238)^3} + 31\pi > 0$$

Como a segunda derivada é positiva, o raio encontrado nos dá um custo mínimo.

Vamos encontrar o valor da altura:

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi (0,52)^2} = 1,17718$$

Resposta: Altura $h = 1,18$ m e raio $r = 0,52$ m.

P 3.10

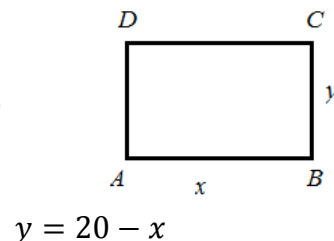
Resolução:

Consideremos o retângulo $ABCD$ de base $AB = x$ e altura $BC = y$. Sua área é dada por $A = x \cdot y$ e o seu perímetro é $P = 2x + 2y$.

Pelo problema,

$$2x + 2y = 40 \quad (:2)$$

$$x + y = 20$$



Substituindo y na fórmula da área,

$$A = x \cdot y \rightarrow A = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$$

Utilizando o critério para o estudo de extremos relativos, temos:

$$A' = 20 - 2x = 0 \rightarrow x = 10$$

$$A'' = -2 < 0$$

Neste caso, como a segunda derivada é negativa, $x = 10$ é abscissa do ponto de máximo da função área. Substituindo em $y = 20 - x = 20 - 10 = 10$. Portanto, $x = y = 10$.

Resposta: Base = altura = 10 cm.

P 3.11

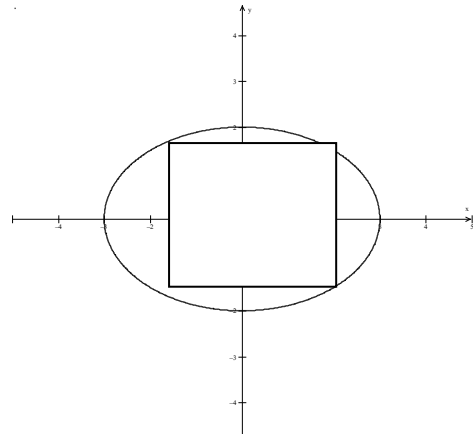
Resolução:

A área do retângulo é $A = x \cdot y$, que deve ser máxima.

Devemos isolar uma variável na equação da elipse:

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \rightarrow 9y^2 = 36 - 4x^2$$

$$y^2 = 4 - \frac{4}{9}x^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$$



Como estamos falando de dimensão, só importa o valor positivo de y . Substituindo na fórmula da área:

$$A = x \cdot y = x \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$$

Utilizando o critério para o estudo de extremos relativos, temos:

$$A' = 1 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2} + x \cdot \frac{-\frac{8}{9}x}{2 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}} = \frac{4 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}x^2}{\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}} = \frac{4 - \frac{8}{9}x^2}{\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}} = 0$$

$$\rightarrow 4 - \frac{8}{9}x^2 = 0 \rightarrow \frac{8}{9}x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
A'' &= \frac{-\frac{16}{9}x \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2} - \left(4 - \frac{8}{9}x^2\right) \left(\frac{-\frac{8}{9}x}{2\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}}\right)}{\left(\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}\right)^2} \\
&= \frac{-\frac{16}{9}x \cdot \left(4 - \frac{4}{9}x^2\right) - \left(-\frac{16}{9}x + \frac{32}{81}x^3\right)}{\left(\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}\right)^2 \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}} = \frac{-\frac{64}{9}x + \frac{64}{81}x^3 + \frac{16}{9}x - \frac{32}{81}x^3}{\left(\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}\right)^3} \\
&= \frac{-\frac{48}{9}x + \frac{32}{81}x^3}{\left(\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}\right)^3} = \frac{-144x + 32x^3}{81\left(\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}\right)^3}
\end{aligned}$$

Vamos substituir o valor de x encontrado para verificar se a área é máxima:

$$A'' = \frac{-144\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 32\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3}{81\left(\sqrt{4 - \frac{4}{9}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right)^3} = -0,0016 < 0$$

Neste caso, como a segunda derivada é negativa, $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ é abscissa do ponto de máximo da função área. Substituindo em $y = \sqrt{4 - \frac{4}{9}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9} \times \frac{18}{4}} = \sqrt{2}$.

Como vemos pela figura, a base do retângulo é $2x = 2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ e a altura do retângulo é $2y = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Resposta: Base $= 3\sqrt{2}$; altura $= 2\sqrt{2}$.

P 3.12

Resolução:

Sabendo que o lucro é dado pela diferença entre a receita e o custo, como q é a quantidade de produto, a receita é dada por:

$$R(q) = 8 \cdot q$$

Logo o lucro é dado por:

$$L(q) = R(q) - C(q) = 8q - (q^3 - 6q^2 + 9q + 20) = -q^3 + 6q^2 - q - 20$$

Vamos derivar e encontrar o ponto de máximo desta função:

$$L'(q) = -3q^2 + 12q - 1$$

Aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes da derivada:

$$q = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-3)(-1)}}{2(-3)} = \frac{-12 \pm \sqrt{132}}{-6} = \frac{-12 \pm 11,489}{-6} = \begin{cases} q' = 0,085 \\ q'' = 3,915 \end{cases}$$

Para determinar qual é a quantidade que dá lucro máximo, vamos analisar o sinal da segunda derivada:

$$L''(q) = -6q + 12 \rightarrow \begin{cases} L''(0,085) = -6(0,085) + 12 > 0 \\ L''(3,915) = -6(3,915) + 12 < 0 \end{cases}$$

Logo, $q'' = 3,915$ é a quantidade que dá lucro máximo.

Resposta: Aproximadamente 3.915 unidades.

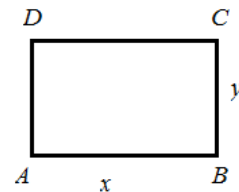
P 3.13

Resolução:

Consideremos o retângulo $ABCD$ de base $AB = x$ e altura $BC = y$. Sua área é dada por $A = x \cdot y$ e o seu perímetro é $P = 2x + 2y$.

Queremos o custo mínimo para 4 voltas, ou seja,

$$C = 4(2x + 2y) \times 5,50$$



Como a área $A = x \cdot y = 180$, substituindo y na fórmula do custo,

$$C = 4 \left(2x + 2 \frac{180}{x} \right) \times 5,50 = 44x + \frac{7920}{x}$$

Utilizando o critério para o estudo de extremos relativos, temos:

$$\begin{aligned} C' = 44 - \frac{7920}{x^2} = 0 &\rightarrow 44x^2 = 7920 \rightarrow x^2 = 180 \rightarrow x = \sqrt{180} \\ &= \sqrt{9 \times 4 \times 5} = 3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

Vamos analisar o sinal da segunda derivada:

$$C'' = \frac{7920}{x^3} \rightarrow C''(6\sqrt{5}) = \frac{7920}{(6\sqrt{5})^3} > 0$$

Neste caso, como a segunda derivada é positiva, $x = 6\sqrt{5}$ é abscissa do ponto de mínimo da função custo. Substituindo em $y = \frac{180}{x} \rightarrow y = \frac{180}{6\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$. Fazendo a conta do custo:

$$C = 4(2 \times 6\sqrt{5} + 2 \times 6\sqrt{5}) \times 5,50 = 1.180,64$$

Resposta: Custo mínimo é R\$ 1.180,64.

P 3.14

Resolução:

Chamemos esses números por x e y . Daí temos:

$$x + y = 96$$

$$P = x \cdot y^2, \text{ onde } P \text{ é o produto}$$

Temos que determinar os valores de x e y que maximizem o produto. Vamos utilizar o critério geral para determinação de extremantes. Da primeira equação, temos:

$$y = 96 - x$$

Substituindo no produto:

$$P = x \cdot y^2 = x \cdot (96 - x)^2 = x(9216 - 192x + x^2) = 9216x - 192x^2 + x^3$$

Derivando e igualando a zero,

$$P' = 9216 - 384x + 3x^2 = 3(3072 - 128x + x^2) = 0$$

Aplicando a fórmula de Bháskara para determinar as raízes da derivada:

$$x = \frac{-(-128) \pm \sqrt{(-128)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3072}}{2 \cdot 1} = \frac{128 \pm \sqrt{4096}}{2} = \frac{128 \pm 64}{2} = \begin{cases} x' = 32 \\ x'' = 96 \end{cases}$$

Para determinar qual é o valor de x que dá o produto máximo, vamos analisar o sinal da segunda derivada:

$$P''(x) = -384 + 6x \rightarrow \begin{cases} P''(32) = -384 + 6 \cdot 32 < 0 \\ P''(96) = -384 + 6 \cdot 96 > 0 \end{cases}$$

Logo, $x' = 32$ é o valor que dá o produto máximo.

Calculando y ,

$$y = 96 - x = 96 - 32 = 64$$

Resposta: Primeiro número = 32 e segundo número = 64.

P 3.15

Resolução:

Vamos chamar o lado da base de x e a altura da caixa de h . Então a área da base é $A_b = x^2$ e o volume da caixa é $V_c = x^2 \cdot h = 64$.

O custo da caixa é dado pela equação:

$$C = 1,20 \cdot x^2 + 4(x \cdot h) \cdot 0,80$$

Destacando da fórmula do volume o valor da altura e substituindo no custo,

$$x^2 \cdot h = 64 \rightarrow h = \frac{64}{x^2}$$

Dai,

$$C = 1,20 \cdot x^2 + 3,20(x \cdot h) = 1,20 \cdot x^2 + 3,20x \cdot \frac{64}{x^2} = 1,2x^2 + \frac{204,8}{x}$$

Vamos derivar e igualar a zero para determinar possíveis extremos:

$$C' = 2,4x - \frac{204,8}{x^2} = 0 \rightarrow 2,4x^3 = 204,8 \rightarrow x^3 = \frac{204,8}{2,4} = 85,33 \rightarrow$$

$$x = 4,40$$

Apenas para verificar se este ponto realmente é ponto de mínimo, vamos analisar o sinal da segunda derivada:

$$C'' = 2,4 + \frac{409,6}{x^3} \rightarrow C''(4,40) = 2,4 + \frac{409,6}{(4,40)^3} > 0$$

Logo, $x = 4,40$ é abscissa de ponto de mínimo da função custo. Vamos calcular a altura:

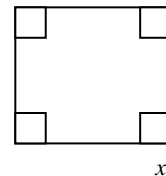
$$h = \frac{64}{x^2} = \frac{64}{(4,40)^2} = 3,30$$

Resposta: Comprimento da base = 4,40 cm, altura = 3,30 cm.

P 3.16

Resolução:

Chamando o lado do quadrado retirado de x , temos que o volume da peça é dado por:



$$V = (80 - 2x)^2 \cdot x = (6400 - 320x + 4x^2)x = 6400x - 320x^2 + 4x^3$$

Vamos derivar e igualar a zero para determinar possíveis extremos:

$$V' = 6400 - 640x + 12x^2 = 4(1600 - 160x + 3x^2) = 0$$

Para determinar as raízes, vamos aplicar a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-(-160) \pm \sqrt{(-160)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1600}}{2 \cdot 3} = \frac{160 \pm \sqrt{6400}}{6} = \frac{160 \pm 80}{6} = \begin{cases} x' = 40 \\ x'' = 13,33 \end{cases}$$

Vamos estudar o sinal da segunda derivada para decidir qual é o valor de x que dá o volume máximo:

$$V'' = -640 + 24x \rightarrow \begin{cases} V''(40) = -640 + 24 \cdot 40 = 320 > 0 \\ V''(13,33) = -640 + 24 \cdot 13,33 = -320 < 0 \end{cases}$$

Logo o valor que dá o volume máximo é $x = 13,33$. O lado do quadrado, portanto, deve medir: $l = 80 - 2x = 80 - 2 \cdot 13,33 = 53,34$ cm.

Resposta: Lado = 53,34 cm

P 3.17

Resolução:

Queremos estudar a distância mínima de um ponto à origem. A fórmula da distância, nesse caso, é dada por:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Onde o ponto é $P = (x, y)$ e a origem $O = (0, 0)$.

Como o ponto é da curva $y = \frac{5}{x}$, vamos substituir na equação e derivar para procurar os possíveis pontos extremos:

$$d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4 + 25}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + 25}}{x}$$

$$d' = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+25}} \cdot x - \sqrt{x^4 + 25} \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^4 - (x^4 + 25)}{x^2\sqrt{x^4 + 25}} = \frac{x^4 - 25}{x^2\sqrt{x^4 + 25}} = 0 \rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

Vamos estudar o sinal da segunda derivada para decidir qual é o valor de x que dá a distância mínima:

$$d'' = \frac{4x^3 \cdot x^2\sqrt{x^4 + 25} - (x^4 - 25) \left[2x\sqrt{x^4 + 25} + x^2 \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+25}} \right]}{x^4(x^4 + 25)} \rightarrow \begin{cases} d''(\sqrt{5}) = > 0 \\ d''(-\sqrt{5}) = < 0 \end{cases}$$

Logo o valor que dá a distância mínima é $x = \sqrt{5}$. E, nesse caso, o valor de y é dado

$$\text{por: } y = \frac{5}{x} = \frac{5}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Resposta: $x = y = \sqrt{5}$.

P 3.18

Resolução:

Lembrando que o comprimento do

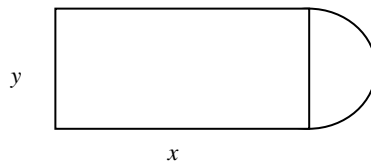
$$\text{semicírculo é } C = \pi \left(\frac{y}{2}\right)$$

Então o perímetro total é dado por:

$$P = 2x + y + \pi \left(\frac{y}{2}\right) = 2x + 2,57y = 42,84$$

A fórmula da área é dada por:

$$A = x \cdot y + \frac{\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2}{2} = xy + 0,39y^2$$



Isolando o valor de x na fórmula do perímetro e substituindo na fórmula de área:

$$2x + 2,57y = 42,84 \rightarrow 2x = 42,84 - 2,57y \rightarrow x = 21,42 - 1,285y$$

$$A = xy + 0,39y^2 = (21,42 - 1,285y)y + 0,39y^2 = 21,42y - 0,895y^2$$

Derivando e igualando a zero para procurar os extremos:

$$A' = 21,42 - 1,79y = 0 \rightarrow 1,79y = 21,42 \rightarrow y = 11,97$$

Vamos verificar a segunda derivada apenas para verificar se o ponto encontrado é ponto de máximo da função área:

$$A'' = -1,79 < 0$$

Portanto, o valor de y encontrado dá a área máxima. Para determinar o x :

$$x = 21,42 - 1,285y = 21,42 - 1,285 \times 11,97 = 6,04$$

Resposta: $x = 6,04\text{m}$ e $y = 11,97\text{m}$.

P 3.19

Resolução:

Vamos chamar uma parte de x e a outra parte de y . Então:

$$x + y = 80$$

A função que queremos minimizar é a soma de seus quadrados:

$$S = x^2 + y^2$$

Isolando o valor de y e substituindo na função:

$$\begin{aligned} y = 80 - x \rightarrow S &= x^2 + (80 - x)^2 = x^2 + 6400 - 160x + x^2 \\ &= 6400 - 160x + 2x^2 \end{aligned}$$

Vamos derivar e igualar a zero para determinar os possíveis extremos:

$$S' = -160 + 4x = 0 \rightarrow 4x = 160 \rightarrow x = 40$$

Para verificar se este ponto dá a soma mínima, vamos analisar o sinal da segunda derivada:

$$S'' = 4 > 0$$

Logo, $x = 40$ dá a soma mínima. Para determinar o valor da outra parte: $y = 80 - x = 80 - 40 = 40$.

Resposta: Uma das partes é 40.

P 3.20

Resolução:

Pela quantidade de arame, temos que:

$$P = x + 2y = 50$$

A área é dada por $A = x \cdot y$. Isolando x na equação acima e substituindo na área, temos:

$$x = 50 - 2y \rightarrow A = x \cdot y = (50 - 2y)y = 50y - 2y^2$$

Derivando e igualando a zero para determinar os extremos da função:

$$A' = 50 - 4y = 0 \rightarrow 4y = 50 \rightarrow y = 12,5$$

Para verificar se o ponto encontrado dá área máxima, vamos estudar o sinal da segunda derivada:

$$A'' = -4 < 0$$

Logo, $y = 12,5$ dá área máxima. Vamos determinar o valor de x :

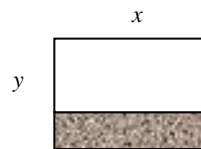
$$x = 50 - 2y = 50 - 2 \times 12,5 = 25$$

.

A área máxima é dada por:

$$A = x \cdot y = 25 \times 12,5 = 312,5 \text{ m}^2$$

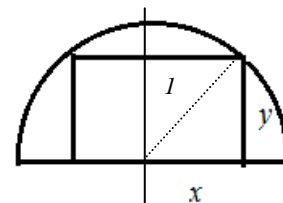
Resposta: A área máxima do terreno é $312,5 \text{ m}^2$.

**P 3.21**

Resolução:

Seja a semicircunferência de raio 1 e vamos chamar a base do retângulo de $2x$ e a altura de y . Pela figura, temos:

$$x^2 + y^2 = 1^2$$



E a área do retângulo é $A = 2 \cdot x \cdot y$. Da primeira identidade, segue que:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Substituindo em A ,

$$A = 2 \cdot x \cdot y = 2 \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

Utilizando o critério geral para o estudo de extremos relativos, temos:

$$\begin{aligned} A' &= 2 \cdot (1 - x^2)^{1/2} + 2x \cdot \frac{1}{2} (1 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = 2 \cdot \sqrt{1 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Igualando o numerador a zero,

$$2 - 4x^2 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ como o valor deve ser positivo temos que } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calculando y,

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4-2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, as dimensões do maior retângulo inscrito são base = $2x = \sqrt{2}$ e altura $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: Base = $\sqrt{2}$; altura = $\sqrt{2}/2$.

P 3.22

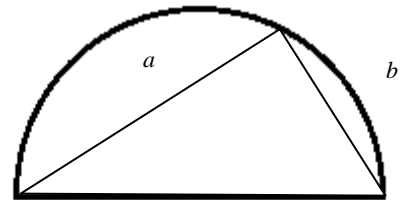
Resolução:

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 + b^2 = 4^2$$

Lembrando que a área do triângulo retângulo é:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$



Isolando o valor de b no teorema de Pitágoras e substituindo na área, temos:

$$b^2 = 16 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{16 - a^2} \rightarrow A = \frac{a \cdot \sqrt{16 - a^2}}{2}$$

Derivando e igualando a zero para determinar os extremos da função:

$$A' = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \sqrt{16 - a^2} + a \cdot \frac{-2a}{2\sqrt{16 - a^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{16 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{16 - a^2}} \right) = 0$$

$$\sqrt{16 - a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{16 - a^2}} \rightarrow 16 - a^2 = a^2 \rightarrow 2a^2 = 16 \rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Substituindo o valor de a para determinar o b:

$$b^2 = 16 - a^2 = 16 - 8 = 8 \rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

Resposta: $a = b = 2\sqrt{2}$.

P 3.23

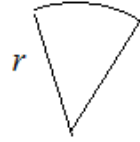
Resolução:

Se forem dadas 3 voltas com 300 m de fio. Vamos gastar 100m para uma volta, ou seja,

$$C = 2r + \theta r = 100 \rightarrow (2 + \theta)r = 100 \rightarrow r = \frac{100}{2 + \theta}$$

A área do setor circular é:

$$A = \frac{\theta r^2}{2} = \frac{\theta}{2} \cdot \left(\frac{100}{2 + \theta} \right)^2 = \frac{5000\theta}{(2 + \theta)^2}$$



Derivando a expressão e igualando a zero para localizar os extremos da função:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{5000 \cdot (2 + \theta)^2 - 5000 \cdot \theta \cdot 2 \cdot (2 + \theta)}{(2 + \theta)^4} = \frac{5000(2 + \theta) - 10000 \cdot \theta}{(2 + \theta)^3} \\ &= \frac{10000 - 5000 \cdot \theta}{(2 + \theta)^3} = 0 \rightarrow 10000 - 5000 \cdot \theta \rightarrow \theta = 2 \end{aligned}$$

Vamos analisar o sinal da segunda derivada para verificar se o valor do ângulo encontrado nos dá o valor da área máxima:

$$\begin{aligned} A'' &= \frac{-5000 \cdot (2 + \theta)^3 - (10000 - 5000 \cdot \theta) \cdot 3 \cdot (2 + \theta)^2}{(2 + \theta)^6} \\ &= \frac{-5000 \cdot (2 + \theta) - (30000 - 15000 \cdot \theta)}{(2 + \theta)^4} \\ &= \frac{-10000 - 5000\theta - 30000 + 15000 \cdot \theta}{(2 + \theta)^4} = \frac{-40000 + 10000 \cdot \theta}{(2 + \theta)^4} \\ A''(2) &= \frac{-40000 + 10000 \cdot 2}{(2 + 2)^4} < 0 \end{aligned}$$

Logo o valor do ângulo encontrado dá a área máxima. Para calcular o raio:

$$r = \frac{100}{2 + \theta} = \frac{100}{2 + 2} = 25$$

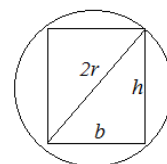
Resposta: O raio deve ser de 25m.

P 3.24

Resolução:

Como a resistência é proporcional à base e ao quadrado da altura, temos:

$$R = k \cdot b \cdot h^2$$



Pelo desenho, aplicando o teorema de Pitágoras,

$$b^2 + h^2 = 30^2 \rightarrow h^2 = 900 - b^2$$

Substituindo na fórmula da resistência,

$$R = k \cdot b \cdot h^2 = k \cdot b \cdot (900 - b^2) = 900kb - kb^3$$

Derivando a expressão e igualando a zero para localizar os extremos da função:

$$R' = 900k - 3kb^2 = 0 \rightarrow 900k = 3kb^2 \rightarrow b^2 = \frac{900k}{3k} = 300 \rightarrow$$

$$b = 10\sqrt{3}$$

Substituindo na expressão da altura,

$$h^2 = 900 - b^2 = 900 - 300 = 600 \rightarrow h = \sqrt{600} = \sqrt{100 \cdot 6} = 10\sqrt{6}$$

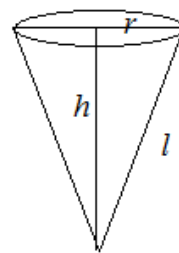
Resposta: Base = $10\sqrt{3}$ cm; altura = $10\sqrt{6}$ cm.

P 3.25

Resolução:

Vamos lembrar que o volume do cone é dado por:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos que,

$$l^2 = h^2 + r^2 \rightarrow r^2 = l^2 - h^2$$

Substituindo na fórmula de volume,

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} (l^2 - h^2) h = \frac{\pi}{3} l^2 h - \frac{\pi}{3} h^3$$

Derivando a expressão e igualando a zero para localizar os extremos da função:

$$V' = \frac{\pi}{3} l^2 - \pi h^2 = 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} l^2 = \pi h^2 \rightarrow h^2 = \frac{l^2}{3} \rightarrow h = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Substituindo no teorema de Pitágoras para determinar o raio,

$$r^2 = l^2 - h^2 = l^2 - \frac{l^2}{3} = \frac{2l^2}{3} \rightarrow r = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Voltando à fórmula do volume,

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2l^2}{3} \right) \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi l^3}{27}$$

Resposta: Volume máximo = $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27} m^3$

P 3.27

Resolução:

Primeiro devemos nos certificar que as funções se anulam no ponto $x = 1$.

$$1 - 1 - \ln 1 = 1 - 1 - 0 = 0; (1)^2 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - \ln x}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 1/x}{2x - 2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $\frac{1}{2}$.**P 3.28**

Resolução:

Verificando se as funções se anulam: $\sin(2 \cdot 0) = 0$ e $0^2 + 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x^2 + x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos(2x)}{2x + 1} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 0 + 1} = 2$$

Resposta: 2.

P 3.29

Resolução:

Verificando se as funções se anulam:

$$\begin{aligned} 4^0 - 2^0 &= 1 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \sin(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{\sin x} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x \cdot \ln 4 - 2^x \cdot \ln 2}{\cos x} = \frac{4^0 \cdot \ln 4 - 2^0 \cdot \ln 2}{\cos 0} = \frac{\ln 4 - \ln 2}{1} \\ &= \ln 2^2 - \ln 2 = 2 \ln 2 - \ln 2 = \ln 2 \end{aligned}$$

Resposta: $\ln 2$.**P 3.31**

Resolução:

Observando que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, então podemos aplicar diretamente a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln x}{x - 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Resposta: ∞ .

P 3.32

Resolução:

Observando que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, então podemos aplicar diretamente a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 1}{e^x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 + 4x}{e^x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x + 4}{e^x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24}{e^x} = \frac{24}{\infty} = 0$$

Resposta: 0.

P 3.33

Resolução:

Observando que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, então podemos aplicar diretamente a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Resposta: 0.

P 3.35

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $\infty \cdot 0$. Devemos aplicar a transformação algébrica acima, antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\frac{1}{e^{-2x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2e^{2x}} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{4e^{2x}} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{8e^{2x}} = \frac{6}{\infty} = 0$$

Resposta: 0.

P 3.36

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $0(-\infty)$. Devemos aplicar a transformação algébrica acima, antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0_+} (1 - \cos(2x)) \cdot \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{1 - \cos(2x)}} \stackrel{\overline{\overline{L'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1.2 \sin(2x)}{(1 - \cos(2x))^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{(1 - \cos(2x))^2}{-2x \cdot \sin(2x)} \stackrel{\overline{\overline{L'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{2(1 - \cos(2x))2 \sin(2x)}{-2 \cdot \sin(2x) - 4x \cdot \cos(2x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{4 \sin(2x) - 4 \cos(2x) \sin(2x)}{-2 \cdot \sin(2x) - 4x \cdot \cos(2x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{4 \sin(2x) - 2 \sin(4x)}{-2 \cdot \sin(2x) - 4x \cdot \cos(2x)} \\
&\stackrel{\overline{\overline{L'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{8 \cos(2x) - 8 \cos(4x)}{-4 \cdot \cos(2x) - 4 \cos(2x) + 8x \cdot \sin(2x)} = \frac{8 - 8}{-4 - 4 + 0} = 0
\end{aligned}$$

Resposta: 0.

P 3.37

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Devemos aplicar a transformação algébrica acima, antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0_+} (\sin x \cdot \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{\overline{\overline{L'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{(\sin x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{(\sin x)^2}{-x \cdot \cos x} \stackrel{\overline{\overline{L'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{-\cos x + x \cdot \sin x} \\
&= \frac{0}{-1 + 0} = 0
\end{aligned}$$

Resposta: 0.

P 3.39

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Devemos aplicar uma transformação algébrica antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{x^2 - \sin x}{x^2 \cdot \sin x} \right) \stackrel{\overline{\overline{L'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{2x - \cos x}{2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x} \right) = \frac{0 - 1}{0 + 0} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Resposta: $-\infty$.

P 3.40

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Devemos aplicar algumas transformações algébricas antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{3x-3} - \frac{1}{x^2-2x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-3}{3(x-1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-4}{3(x-1)^2} \right) \xrightarrow{\overline{L'H}} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{3 \cdot 2(x-1)} \right) = \frac{1}{0} = \infty\end{aligned}$$

Resposta: ∞ .

P 3.41

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Devemos aplicar uma transformação algébrica antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{x+2-x}{x^2(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \left(\frac{2}{x^2(x+2)} \right) = \frac{2}{0} = \infty\end{aligned}$$

Como pode-se observar, não houve necessidade de aplicar a regra de L'Hospital, já que depois da transformação algébrica a indeterminação foi resolvida.

Resposta: ∞ .

P 3.43

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo 0^0 . Devemos aplicar a função logarítmica em ambos os lados, fazer as transformações algébricas necessárias, antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$F(x) = (x + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \rightarrow \ln F(x) = \operatorname{tg} x \cdot \ln(x + \operatorname{sen} x)$$

Chamemos de $L = \lim_{x \rightarrow 0_+} \ln F(x)$, então,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \operatorname{tg} x \cdot \ln(x + \operatorname{sen} x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln(x + \operatorname{sen} x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1+\cos x}{x+\operatorname{sen} x}}{-\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1+\cos x}{x+\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{(1 + \cos x) \operatorname{sen}^2 x}{-(x + \operatorname{sen} x)} \\
&\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-\operatorname{sen}^3 x + (1 + \cos x) 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{-(1 + \cos x)} = \frac{0}{-2} = 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^{\frac{1}{x - \ln x}} = e^L = e^0 = 1.$$

Resposta: 1.

P 3.44

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo 0^0 . Devemos aplicar a função logarítmica em ambos os lados, aplicar as transformações algébricas necessárias, antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$F(x) = x^x \rightarrow \ln F(x) = x \cdot \ln x$$

Chamemos de $L = \lim_{x \rightarrow 0_+} \ln F(x)$, então,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0_+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{-1} = \lim_{x \rightarrow 0_+} -x = 0$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = e^L = e^0 = 1.$$

Resposta: 1.

P 3.45

Resolução:

Observemos que seu limite tende à forma indeterminada do tipo 0^0 . Devemos aplicar a função logarítmica em ambos os lados, aplicar as transformações algébricas necessárias, antes de aplicar a regra de L'Hospital:

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \ln F(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(e^x + x)$$

Chamemos de $L = \lim_{x \rightarrow 0_+} \ln F(x)$, então,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} \cdot \ln(e^x + x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln(e^x + x)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{e^x + 1}{e^x + x} \stackrel{\frac{2}{2}}{L'H} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^L = e^{\frac{1}{2}}.$$

Resposta: $e^{\frac{1}{2}}$.

P 3.46

Resolução:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - (x^2 + 2x) \\ &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x \\ &= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x \end{aligned}$$

$$\Delta y = (2x + 2 + \Delta x)\Delta x \rightarrow \Delta y = (2 \cdot 2 + 2 + 0,1)0,1 = 6,1 \times 0,1 = 0,61$$

$$dy = f'(x)dx = (2x + 2)dx \rightarrow dy = (2 \cdot 2 + 2)0,1 = 6 \times 0,1 = 0,6$$

$$\epsilon = \Delta y - dy = 0,61 - 0,6 = 0,01$$

Resposta: $\Delta y = 0,61$, $dy = 0,6$ e $\epsilon = 0,01$.

P 3.47

Resolução:

- a) Consideremos a função $f(x) = \sqrt[2]{x}$ e vamos utilizar a aproximação pela diferencial:

$$dy = f'(x)dx \rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Substituindo 5 por 4, que é o quadrado perfeito mais próximo de 5, temos

$x = 4$ e $\Delta x = 1$:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(-1) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Usando a aproximação,

$$dy \cong \Delta y = f(x) - f(x_0)$$

$$\frac{1}{27} \cong f(x) - \sqrt[2]{4}$$

$$\sqrt[2]{5} \cong \sqrt[2]{4} + \frac{1}{4} = 2 + 0,25 = 2,25.$$

Resposta: $\sqrt[2]{5} \cong 2,25$

P 3.48

Resolução:

- a) Consideremos a função $f(x) = x^4$ e vamos utilizar a aproximação pela diferencial:

$$dy = f'(x)dx \rightarrow dy = 4x^3 dx$$

Substituindo 2,01 por 2, que é o inteiro mais próximo de 2,01, temos $x = 2$ e $\Delta x = 0,01$:

$$dy = 4(2)^3(0,01) = 0,32$$

Usando a aproximação,

$$dy \cong \Delta y = f(x) - f(x_0)$$

$$0,32 \cong f(x) - 2^4$$

$$(2,01)^4 \cong 2^4 + 0,32 = 16 + 0,32 = 16,32.$$

Resposta: $(2,01)^4 \cong 16,32$.

P 3.49

Resolução:

Sabendo que a área do círculo é dada por: $A = \pi r^2$, onde r é o raio do círculo, vamos usar a diferencial da área para calcular a variação:

$$dA = A' dr$$

$$dr = 3\%.3 = \frac{3}{100} \cdot 3 = \frac{9}{100} = 0,09$$

$$A' = 2\pi r \rightarrow dA = 2\pi(3) \cdot (0,09) = 0,54\pi$$

Resposta: A variação aproximada é de $0,54\pi \text{ cm}^2$.

P 3.50

Resolução:

Sabendo que o volume do cubo é dado por: $V = a^3$, onde a é a aresta do cubo, vamos usar a diferencial do cubo para calcular a variação:

$$dV = V' da$$

$$da = 0,1$$

$$V' = 3a^2 \rightarrow dV = 3(2)^2 \cdot (0,1) = 1,2$$

Resposta: A variação aproximada é de $1,2\text{cm}^3$.

P 3.51

Resolução:

Sabendo que o volume do cilindro é dado por: $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio do cilindro, vamos usar a diferencial do volume para calcular a variação:

$$dV = V' dr$$

$$dr = 0,1$$

$$V' = 2\pi r h \rightarrow dV = 2\pi(2)(5)(0,1) = 2\pi$$

Resposta: A variação aproximada é de $2\pi \text{ m}^3$.

P 3.52

Resolução:

Sabendo que o volume da esfera é dada por: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde r é o raio da esfera, vamos usar a diferencial do volume para calcular a variação:

$$dV = V' dr$$

$$dr = 2,2 - 2 = 0,2$$

$$V' = 4\pi r^2 \rightarrow dV = 4\pi(2)^2 \cdot (0,2) = 3,2\pi$$

Resposta: A variação aproximada é de $3,2\pi \text{ cm}^3$.

